FACULTY OF SCIENCE

B.Sc. (CBCS) III-Year (V-Semester) Regular Examinations, Dec-2022/Jan-2023

Mathematics-V

(Linear Algebra)

Time: 3 Hours Max Marks: 80

SECTION-A (4x5=20 Marks)

Answer any Four questions from the following

ఈక్రిందివానిలో ఏవేని నాలుగు ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి

1. Define a Vector space and subspace of a vector space.
సదిశాంతరాళం, సదిశాంతరాళం యొక్క ఉపాంతరాళంలను నిర్వచించండి.

2. If a 4x7 matrix A has rank 3, find $\dim Nul\ A, \dim Row\ A$ and rank A^{T}.
A అనే 4x7 తరగతి మాత్రిక కోటి 3 అయితే $\dim Nul\ A, \dim Row\ A$ మరియు A^{T} యొక్క కోటిలను కనుక్కోండి.

3. Find the Eigen values of matrix $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$.
మాత్రిక $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ యొక్క లాక్షణిక విలువలను కనుక్కోండి.

4. Show that two vectors u and v are orthogonal if and only if $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.
రెండు సదిశలు u మరియు v లు లంబ సదిశలు కావడానికి $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$ ఆవశ్యకం, పర్యాప్తం అని చూపండి.

5. Find the vector x determined by the given coordinate vector $[x]_B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}$ and the basis $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\ 0\\ -2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\ -3\\ 0\end{bmatrix}\right\}$.
ఆధారం $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\ 0\\ -2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\ -3\\ 0\end{bmatrix}\right\}$ నిరూపక సదిశ $[x]_B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}$ గాగల సదిశ x ను కనుక్కోండి.

6. If A= $\begin{bmatrix}1 & -4 & 9 & -7\\ -1 & 2 & -4 & 1\\ 5 & -6 & 10 & 7\end{bmatrix}$ then find basis for Row A.
A= $\begin{bmatrix}1 & -4 & 9 & -7\\ -1 & 2 & -4 & 1\\ 5 & -6 & 10 & 7\end{bmatrix}$ అయితే Row A ఆధారాన్ని కనుక్కోండి.

SECTION-B (4x15=60 Marks)

Answer all the following questions

ఈక్రింది అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయుము

7. (a) Define a linear transformation and kernel of a liner transformation. If T is linear transformation from a vector space V into another vector space W show that kernel of T is a subspace of V.

రుజు పరివర్తన, రుజు పరివర్తన యొక్క అంతస్థంలను నిర్వచించండి. సదిశాంతరాళంV నుంచి సదిశాంతరాళం W కు రుజు పరివర్తన T అయితే T యొక్క అంతస్థం సదిశాంతరాళం V కు ఉపాంతరాళం అనిచూపండి.

(OR) / లేదా

(b) Find the bases and dimensions of null space and column space of

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -2 & -4\\ 2 & -6 & -3 & 1\\ -3 & 8 & 2 & -3\end{bmatrix}.$$

$A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -2 & -4\\ 2 & -6 & -3 & 1\\ -3 & 8 & 2 & -3\end{bmatrix}$ యొక్క శూన్య అంతరాళం (null space), దొంతి అంతరాళం (column space) ల ఆధారాలను, పరిమాణాలను కనుక్కోండి.

8. (a) If $v_1, v_{2,}......v_r$ are Eigen vectors that correspond to distinct Eigen values $\lambda_{1,}\lambda_2.....\lambda_r$ of $n\times n$ Matrix A then show that the set $\{v_1, v_{2,}......v_r\}$ is linearly independent.

$n\times n$ తరగతి మాత్రిక A యొక్క విభిన్న లాక్షణిక విలువలు $\lambda_{1,}\lambda_2.....\lambda_r$ లకు అనుగుణ లాక్షణిక సదిశలు $v_1, v_{2,}......v_r$ అయితే సమితి $\{v_1, v_{2,}......v_r\}$ రుజు స్వతంత్రమని చూపండి.

(OR) / లేదా

(b) Let $b_1=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}, b_2\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}, c_1=\begin{bmatrix}-7\\9\end{bmatrix}, c_2=\begin{bmatrix}-5\\7\end{bmatrix}$ and $B=\{b_1,b_2\}$ and $C=\{c_1,c_2\}$ be bases of R^2. Then find i) Change of coordinate matrix from B to C

ii) Change of coordinate matrix from C to B.

$b_1=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}, b_2\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}, c_1=\begin{bmatrix}-7\\9\end{bmatrix}, c_2=\begin{bmatrix}-5\\7\end{bmatrix}$ మరియు $B=\{b_1,b_2\}, C=\{c_1,c_2\}$ లు R^2 కు ఆధారాలు అయితే i) B నుంచి C కు నిరూపక మార్పు మాత్రిక

ii) C నుంచి B కు నిరూపక మార్పు మాత్రికలను కనుక్కోండి.

9. (a) Diagonalize $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ and compute A^8.

$A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ ను వికర్ణీకరించి, A^8 ను గణించండి.

(OR) / లేదా

(b) Let T: $P_2 \to P_3$ be a linear transformation defined as $T(p(t))=(t+3)p(t)$

Then i) Find the image of $p(t)=3-2t+t^2$

ii) Find a matrix for T relative to the basis $\{1,t,t^2\}$ and $\{1,t,t^2,t^3\}$

Contd......3

T: $P_2 \rightarrow P_3$ ఋజు పరివర్తనను $T(p(t)) = (t+3)p(t)$ గా నిర్వచిస్తే

i) $p(t) = 3 - 2t + t^2$ యొక్క ప్రతిబింబాన్ని కనుక్కోండి.

ii) $\{1, t, t^2\}$ మరియు $\{1, t, t^2, t^3\}$ ఆధారాల దృష్ట్యా T సూచిక మాత్రికను కనుక్కోండి.

10. (a) Define orthogonal set and orthonormal set. Show that $\{v_1, v_2, v_3\}$ is an orthonormal basis

of R^3, where $v_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$.

లంబ సమితి, లంబాభిలంబ సమితిలను నిర్వచించండి.

$v_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$ అయినప్పుడు $\{v_1, v_2, v_3\}$

R^3 కి లంబాభిలంబ సమితి అని చూపండి.

(OR) / లేదా

(b) Let $W = Span\{x_1, x_2, x_3\}$, where $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Construct an orthogonal basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ for W.

$W = Span\{x_1, x_2, x_3\}$ ఇక్కడ $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ మరియు $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

W కు లంబ ఆధారం $\{v_1, v_2, v_3\}$ ను నిర్మించండి.